

JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY, Series B 27, 130–150 (1979)

## Triangulation à $v_5$ séparés dans le problème des quatre couleurs

KENNETH APPEL AND WOLFGANG HAKEN

*Department of Mathematics, University of Illinois, Urbana–Champaign, Urbana, Illinois 61801*

AND

JEAN MAYER

*Université Paul Valéry, Montpellier, France*

*Communicated by the Managing Editors*

Received April 27, 1976

Considérant la notion classique minimal planaire 5-chromatique, les auteurs étudient les triangulations du plan dont tous les sommets sont de degré  $\geq 5$  et dont les sommets de degré 5 sont séparés (aucune arête ne relie deux sommets de degré 5); ils prouvent qu'un graphe minimal comporte nécessairement une arête 5–5. L'article présente 1°) une démonstration fondée sur un ensemble minimum de 14 configurations réductibles, 2°) une démonstration fondée sur un algorithme applicable au cas général.

Cet article présente une propriété des graphes minimaux dans le problème des quatre couleurs:

**THÉORÈME.** *Un graphe minimal comporte nécessairement une arête joignant deux sommets de degré 5.*

### DÉVELOPPEMENT HISTORIQUE DE LA QUESTION

En 1879, Kempe [8] tenta de prouver la conjecture des quatre couleurs en démontrant que toute carte normale contenait une face avec cinq voisines au plus et qu'une face ayant deux, trois quatre ou cinq voisines était "réductible" en ce sens qu'elle ne pouvait se trouver dans une carte minimale planaire 5-chromatique. Mais sa preuve de la réductibilité du pentagone n'est pas valable.

En 1913, Birkhoff [3] généralisa les méthodes de Kempe pour prouver la

réductibilité et décrit des algorithmes applicables à des configurations comportant plus d'une face et pouvant conduire à des preuves de réductibilité pour de telles configurations. A sa suite, de nombreux investigateurs ont appliqué ces algorithmes pour démontrer la réductibilité de nombreuses configurations. Celles-ci ont été utilisées pour prouver plusieurs résultats partiels concernant la conjecture des quatre couleurs; nous désirons mentionner les suivants (à partir d'ici, nous utilisons la terminologie relative aux triangulations du plan et au coloriage des sommets):

Un graphe minimal 5-chromatique comporte

- (a) au moins un sommet de degré 6 ou 7 (Choinacki [4], Heesch [6]),
- (b) non uniquement des sommets de degré 5 et 7 (Heesch [7])
- (c) au moins un sommet de degré 6 ou un triangle 5-5-5 (Stanik [10]),
- (d) au moins 96 sommets (Mayer [9]).

(Chacun de ces résultats a été précédé d'une série de résultats plus faibles que nous ne mentionnons pas individuellement.)

Heesch [6] conjecture qu'une preuve de la conjecture des quatre couleurs pouvait être obtenue par des méthodes semblables à celles utilisées pour l'obtention des résultats (a), (b) et (c) ci-dessus, mais qu'un ensemble plus nombreux de configurations réductibles serait nécessaire. Par la suite, Haken [5] observa que la méthode utilisée par Heesch dans [6] pour établir le résultat (a), méthode que nous désignerons sous le nom de "principe de déchargement" (principle of discharging), pouvait être considérablement améliorée. Ceci conduisit à se demander si un procédé de déchargement amélioré de la même manière pouvait être trouvé en vue de traiter le cas général (celui de triangulations planaires sans restrictions concernant le degré ou le nombre des sommets, etc.). Par la suite Appel et Haken entreprirent une recherche systématique sur cette question: les premiers résultats furent présentés dans [2]. En vue de démontrer la valeur fonctionnelle de cette méthode, Appel et Haken [1] l'appliquèrent (avec des changements mineurs) au cas spécial de triangulations sans sommets de degré 5 adjacents. Ceci aboutit à un ensemble de 47 configurations "apparemment réductibles", tel que toute triangulation sans sommets de degré 5 adjacents comporte au moins un membre de cet ensemble. Ici une configuration est dite "apparemment réductible" si (1) la longueur  $n$  de son circuit n'excède pas le nombre  $m$  des sommets qui en font partie de plus de 4, et (2) elle ne contient pas un "obstacle à la réduction" (à savoir un "sommet à 4 branches" un "sommet d'articulation à 3 branches", ou une "paire 5-5 suspendue") Tandis que la condition (1) est fondée sur des considérations générales de probabilité, les obstacles à la réduction de la condition (2) ont été observés par Heesch et indiqués dans une communication privée; par la suite Stromquist [11],

utilisant les méthodes de Tutte et Whitney [12] les a retrouvés théoriquement (comme les cas particuliers les plus importants d'obstacles plus généraux).

Mayer avait développé la méthode personnelle de déchargement pour en dériver le résultat (d) ci-dessus. Lorsqu'il apprit le résultat de Appel et Haken concernant l'ensemble de 47 configurations, il trouva une méthode de déchargement particulièrement adaptée au cas spécial des sommets de degré 5 non-adjacents, permettant de traiter ce cas à l'aide d'un ensemble de 14 configurations réductibles de taille (longueur du circuit périphérique)  $n \leq 14$  (tandis que l'ensemble d'Appel et Haken contenait des configurations allant jusqu'à  $n = 16$ ). Ce traitement (probablement le plus court possible) du cas spécial est présenté dans la section 1 de cet article. Les réductions nécessaires sont indiquées, avec la mention de leurs auteurs, dans la Fig. 1.

Entre temps Appel et Haken avaient continué d'améliorer leur méthode de déchargement applicable au cas général. Lorsqu'ils eurent connaissance du résultat mentionné au paragraphe précédent, ils appliquèrent au cas spécial leur méthode la plus récente et arrivèrent à un ensemble de 29 configurations de taille  $n \leq 13$ . Ce traitement du cas spécial est présenté dans la Section 2.

*Note.* Dans la Section 1, une adaptation de la méthode permet, au prix d'une discussion un peu miniteuse, d'utiliser 20 réductions de taille non supérieure à 12.

*Notations utilisées.* Nous appellerons  $v_i$  un sommet de degré  $i$  (incident à  $i$  arêtes), et  $p_i$  le nombre de  $v_i$  du graphe considéré désigné par  $G$ . Un  $v_i$  sera parfois désigné, de manière abrégée, par  $i$ : ainsi  $A = 6$  signifiera: *Nous considérons le cas où  $A$  est de degré 6.*

Dans les figures, nous désignerons, selon les symboles introduits par Heesch [6] un  $v_5$  par un petit cercle plein, un  $v_6$  par le point de concours de ses arêtes, un  $v_7$  par un petit cercle évidé. Un sommet de degré non précisé sera marqué d'un point à proximité duquel les arêtes incidentes seront interrompues.

Nous considérons un graphe  $G$  planaire possédant les deux propriétés suivantes:

- (A)  $G$  est triangulé;
- (B)  $G$  a tous ses sommets de degré  $\geq 5$ ;

#### LE PRINCIPE DE DÉCHARGEMENT (DISCHARGING PRINCIPLE)

Le principe de déchargement utilisé dans les deux démonstrations présentées ici est fondé sur l'égalité suivante, applicable aux triangulations planaires

dont tous les sommets ont un degré au moins égal à 5 (nous avons vu plus haut que les sommets de degré  $\leq 4$  ont été réduits par Kempe):

$$\sum (6 - i) p_i = 12 \quad (i \geq 5). \quad (1)$$

On définit la charge initiale d'un sommet comme étant égale à  $k(6 - i)$ ,  $k$  étant un facteur choisi pour la commodité de la démonstration. Dans la Section 1,  $k = 10$ ; dans la Section 2,  $k = 60$ .

La charge d'un sommet est positive si  $i = 5$ , nulle si  $i = 6$ , négative si  $i \geq 7$  (sommets *majeurs*). On définit une méthode de déchargement (*discharging procedure*) selon laquelle on fait passer les charges positives sur les sommets chargés négativement.<sup>1</sup> Le but de cette redistribution des charges est d'obtenir l'alternative suivante:

- (i) Aucune des charges modifiées n'est positive, ce qui contredit l'égalité (1).
- (ii) La triangulation contient une sous-configuration réductible qui n'est pas minimale.

La non-existence des graphes minimaux entraîne comme conséquence logique la non-existence des graphes planaires 5-chromatiques.

La remarque finale de la Section 2 fait voir que le principe de déchargement est applicable au cas général et fait espérer, par cette méthode, une démonstration de la conjecture des quatre couleurs.

## 1. PREUVE DU THÉORÈME À L'AIDE D'UN ENSEMBLE DE 14 CONFIGURATIONS RÉDUCTIBLES

Pour le théorème le graphe  $G$  possède aussi la propriété suivante:

- (C)  $G$  ne comporte pas deux  $v_5$  voisins (c'est-à-dire: reliés par une arête).

Nous montrerons qu'un graphe possédant en outre la propriété C ne peut vérifier (1) sans comporter comme sous-graphe une des configurations réductibles représentées sur la Fig. 1: en conséquence  $G$  est réductible et n'est pas minimal, ce qui prouve le théorème annoncé dans l'introduction.

*Remarque sur la Fig. 1.* Dans la représentation des configurations réductibles, seuls sont figurés les sommets de degré déterminé. En se fondant sur le fait que  $G$  est triangulé, on peut compléter chaque configuration de manière à l'entourer d'un cycle de sommets (de degré quelconque, distincts ou non) formant un cycle qu'on nomme le *cycle séparateur* de la configuration.

<sup>1</sup> Dans la Section 1, les  $v_6$ , bien que n'ayant pas une charge initiale négative, reçoivent de manière transitoire une partie de la charge de leurs voisins  $v_5$ .

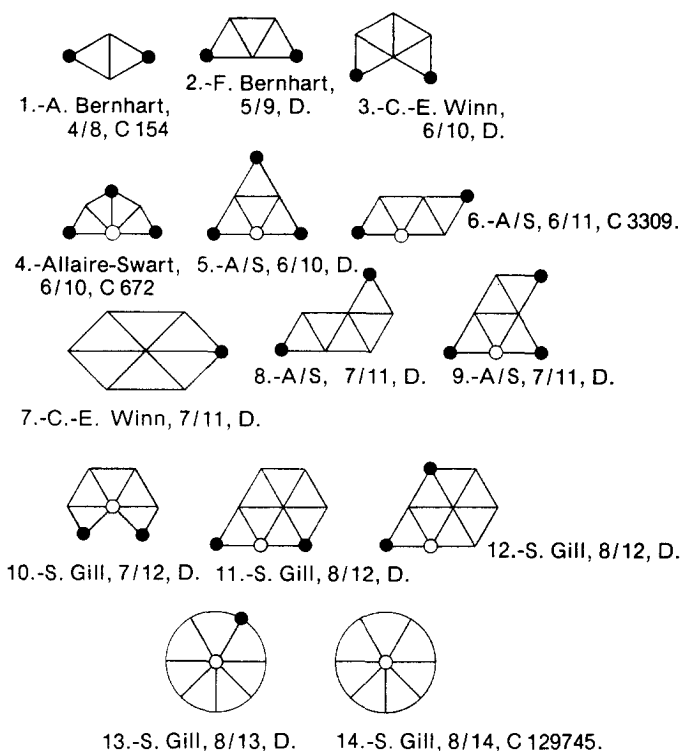


FIGURE 1

(La Fig. 2 nous donne un exemple concernant la configuration 1.)

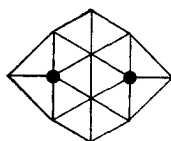


FIGURE 2

La légende de chaque configuration comporte son numéro d'ordre, permettant de la citer dans le cours de la démonstration (ce numéro sera toujours donné en italique); le nom de l'auteur; une fraction dont le numérateur est le nombre des sommets de degré déterminé et le dénominateur le nombre de sommets du cycle séparateur (*ring order*); enfin la lettre *D*, ou *C* suivie d'un nombre, selon que la configuration est *D*-réductible. Une configuration est *D*-réductible si tous les coloriages possibles du cycle séparateur sont directement extensibles à la partie intérieure de la configuration (*coloriages directs*), ou réductibles à des coloriages directs par l'argument

des chaînes de Kempe, au besoin répété. Une configuration est *C*-réductible si elle comporte des coloriations irréductibles du cycle séparateur (*en nombre indiqué*), qui doivent être éliminés par un *réducteur* approprié. Ces indications, qui intéressent la théorie des réductions, sont données ici à titre purement documentaire.

### *Principe de la démonstration*

Nous utilisons le *discharging principle* exposé dans l'introduction.

Multiplions, pour la commodité des calculs, les deux membres de (1) par 10. Nous affectons chaque  $v_i$  d'une *charge initiale* égale à  $10(6 - i)$ . La somme totale des charges initiales est  $+120$ . La charge initiale d'un  $v_5$  est  $+10$ , celle d'un  $v_6$  est nulle, celle d'un *sommet majeur* ( $i \geq 7$ ) est négative.

Nous allons définir deux opérations de transfert qui modifieront la répartition des charges sans en changer la somme. Nous appellerons *charge modifiée* la somme algébrique de la charge initiale d'un sommet, des charges positives transférées sur lui, et des charges, comptées négativement, qu'il transfère sur ses voisins. Si nous pouvons montrer que la charge modifiée de tout sommet est  $\leq 0$ , à moins que  $G$  ne comporte une des configurations de la Fig. 1, nous aurons l'alternative suivante:

- (i)  $G$  ne peut vérifier (1), ce qui contredit la planarité;
- (ii)  $G$  comporte une configuration réductible, ce qui contredit la minimalité. Par là sera prouvé le théorème annoncé.

### *Démonstration*

Les deux règles de transfert sont les suivantes:

RI: On transfère de tout  $v_5$  sur chacun de ses voisins une charge égale à  $+2$ .

RII. On transfère de tout  $v_6$  ayant au moins un voisin  $v_5$ , sur chacun de ses voisins majeurs, une charge égale à  $+1$  ou à  $+2$ : elle est égale à  $+1$  dans le cas de voisins majeurs contigus, ou séparés seulement par des  $v_6$  dans l'entourage du sommet  $v_6$  origine du transfert; elle est égale à  $+2$  dans le cas contraire.

LEMME 1. *La règle RI décharge complètement les  $v_5$ .*

*Preuve.* D'après la propriété *C*, aucun  $v_5$  ne reçoit de charge positive; sa charge initiale est intégralement répartie entre ses cinq voisins.

*Note.* Dans la suite de la démonstration, la propriété *C* sera sous-entendue.

LEMME 2. *La règle RII décharge complètement les  $v_6$ .*

*Preuve.* La charge initiale d'un  $v_6$  est nulle. Il reçoit de chacun de ses voisins  $v_5$  une charge égale à  $+2$  dont la règle RII a pour objet de le décharger. Définissons, sur le cycle  $C_6$  constituant l'entourage du  $v_6$  considéré, un sens de parcours choisi à volonté. Si nous faisons abstraction des  $v_6$  présents dans le cycle, nous remarquerons qu'un  $v_5$  ne peut avoir pour successeur un  $v_5$  (d'après les réductions 1, 2, 3,) mais un ou plusieurs sommets majeurs. Dans le cas d'un seul voisin  $v_5$ , il y a aussi au moins un voisin majeur, d'après 7. En conséquence, la charge  $+2$  due à un  $v_5$  est compensée par le transfert d'une charge égale sur son successeur majeur (ou de charges égales à  $+1$  sur ses successeurs majeurs contigus ou séparés par des  $v_6$ ).

LEMME 3. *Tout sommet de degré  $\geq 8$  a une charge modifiée négative. Un  $v_7$  ayant au plus cinq voisins mineurs a une charge modifiée  $\leq 0$ .*

*Preuve.* La charge initiale d'un  $v_i$  est  $60 - 10i$ . La somme des charges transférées sur lui est au plus le double du nombre de ses voisins mineurs, donc  $\leq 2i$ . La charge modifiée est donc au plus  $60 - 8i$ , quantité négative si  $i \geq 8$ .

La charge initiale d'un  $v_7$  est  $-10$ . Il peut donc avoir cinq voisins mineurs sans que sa charge modifiée devienne positive.

*$v_7$  ayant six ou sept voisins mineurs.* On peut écarter les cas où  $v_7$  considéré a un voisin majeur contigu à deux voisins  $v_6$ : la contribution de ces derniers à la charge modifiée est au plus égale à  $+1$  et la charge modifiée est  $\leq 0$ . Les cas restants seront réduits au moyen de trois nouveaux lemmes.

LEMME 4. *Si un  $v_7$  a dans son entourage la séquence 5665, les deux  $v_6$  transfèrent seulement  $+1$  chacun sur le  $v_7$ .*

*Preuve*

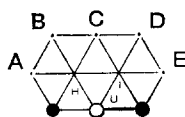


FIGURE 3

$C$  ne peut être un  $v_6(5)$ ; si  $C$  est un sommet majeur, la preuve est acquise,  $H$  et  $I$  ne transférant l'un et l'autre que  $+1$  sur  $U$  (et  $+1$  sur  $C$ ). Posons donc  $C = 6$ : si  $B$  ou  $D$  est un  $v_6$ , on a 9; si  $ABC = 666$  ( $CDE = 666$ ), on a 11. Donc  $A$  ou  $E$  est majeur (ainsi que  $D$  ou  $B$ ), et l'application de RII ne transfère que  $+1$  de  $H$  (ainsi que de  $I$ ) sur  $U$ .

LEMME 5. Si un  $v_7$  a dans son entourage la séquence 5666, les deux premiers  $v_6$  ne peuvent transférer l'un et l'autre  $+2$  sur le  $v_7$ .

*Preuve*

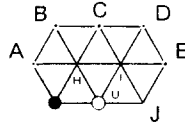


FIGURE 4

$I$  a un voisin  $v_5$ , sinon il transférerait 0 sur  $U$ . Ce  $v_5$  ne peut être  $E$ , à cause de 6.

Si  $D$  est un  $v_5$  : le lemme est prouvé si  $C$  est majeur; posons donc  $C = 6$ : si  $B = 5$ , on a 2; si  $A$  ou  $B$  est majeur, le lemme est prouvé,  $H$  ne transférant que  $+1$  sur  $U$ . Si  $ABCD = 6665$ , on a 2. Donc  $D$  ne peut être un  $v_5$ .

Posons donc  $C = 5$ : si  $D$  ou  $E$  est majeur, le lemme est prouvé. Et si  $CDE = 566$ , on a 12.

LEMME 6. Si un  $v_7$  a dans son entourage la séquence 56665, la quantité transférée globalement par les trois  $v_6$  sur le  $v_7$  n'excède par  $+4$ .

*Preuve*

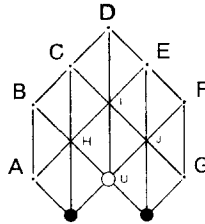


FIGURE 5

Si  $I$  n'a pas de voisin  $v_5$ , il transfère 0 sur  $U$  et la preuve est acquise. Si  $C$  ou  $E$  est un  $v_5$ , on a 6. Il faut donc poser  $D = 5$ . Si  $C$  ou  $E$  est majeur, le résultat est acquis,  $I$  et  $H$  (ou  $J$ ) transfèrent chacun  $+1$  seulement sur  $U$ . Posons donc  $CE = 66$ .

Si  $B$  (ou  $F$ ) = 5, on a 2. Si  $A$  ou  $B$  (et symétriquement  $F$  ou  $G$ ) est majeur, le résultat est à nouveau acquis,  $H$  et  $J$  ne transférant que  $+1$  chacun sur  $U$ . Enfin, si  $ABCD = 6665$  (ou si  $DEFG = 5666$ ), on a 8.

Nous pouvons à présent traiter les cas de  $v_7$  ayant plus de cinq voisins mineurs (et ne comportant pas la séquence 6 M 6).

7 —  $M565656$  ou 7 —  $6565656$ : on a 4.

7 —  $5656666$  ou 7 —  $M566665$ : on a 10.

7 —  $5665666$  la charge modifiée est limitée à 0 par les lemmes 4 et 6.

7 —  $5666666$ : on a 13.

7 —  $6666666$ : on a 14.



Le lemme 4 limite à 0 (au maximum) la charge modifiée dans les types:  
 $7 - M565665$  et  $7 - M566566$ ;

Le lemme 5 limite de même la charge modifiée dans les types suivants:

$7 - M565666$ ,  $7 - M566666$  et  $7 - M566656$ ;

dans ce dernier cas, on peut appliquer le lemme 6 au lieu du lemme 5.

En aucun cas la charge modifiée d'un sommet ne peut être positive sans que le graphe comporte l'une des 14 réductions de la Fig. 1: ce qui était à démontrer.

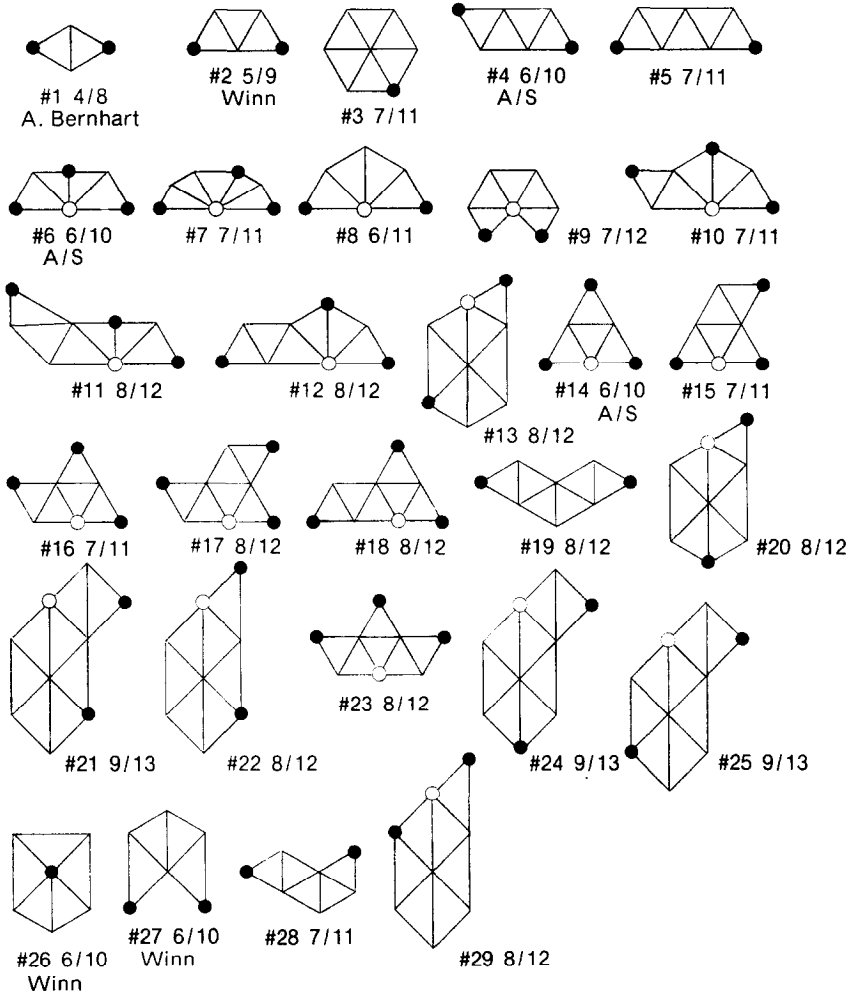


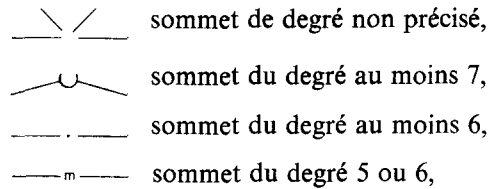
FIG. 6. L'ensemble <inévitable>  $U$ . La réductibilité des configurations de taille plus grande que 10 était vérifiée par les programmes d'ordinateur de Appel, Haken et J. Koch employant des algorithmes basés sur les oeuvres de Birkhoff [3] appelés  $C$ - et  $D$ -réductibilité dans [6, 12].

## 2. UNE DÉMONSTRATION FONDÉE SUR UN ALGORITHME APPLICABLE AU CAS GÉNÉRAL

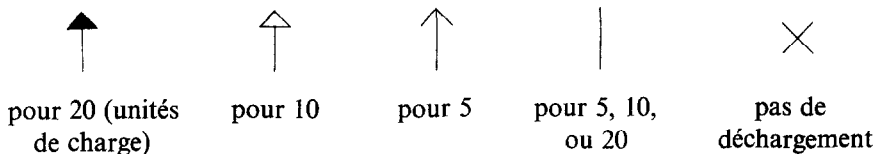
Ici nous affectons chaque  $v_i$  d'une charge initiale  $q_0$  égale à  $60(6 - i)$ . Nous allons définir un algorithme de transfert et nous montrerons que la charge modifiée de chaque sommet est  $\leq 0$ , à moins que  $G$  ne comporte une des 28 configurations de la Fig. 6. Ainsi, par le même principe qui est utilisé dans la Section 1, le théorème est prouvé.

### (a) Le déchargement transversal

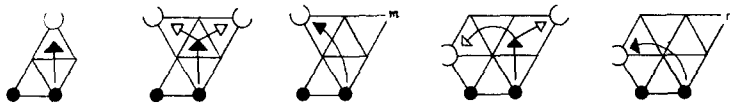
Dans [2] est exposé le principe de déchargement commençant par les déchargements intégraux (*integral dischargings*). En commençant de cette



(à travers les barrières 6-6)



barrière 5-6-6:



arête 6-6 (n'appartenant pas à une barrière 5-6-6)

barrière 6-6-6

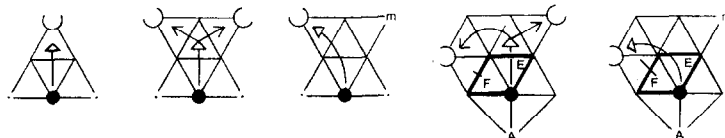


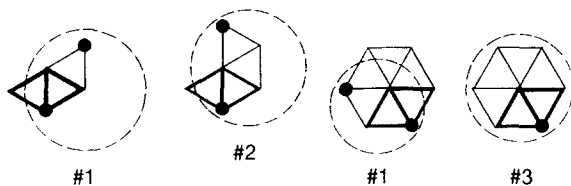
FIG. 7. Les déchargements  $T$ . Note: Dans les diagrammes définissant les déchargements  $T$  à travers l'arête  $E$  de la barrière 6-6-6, le déchargement  $T$  à travers  $F$  est une fonction du degré  $A$ . Si  $\deg(A) = 5$ ,  $F$  appartient à une barrière 5-6-6, donc la valeur est 20. Si  $\deg(A) > 5$ ,  $F$  est une arête 6-6 n'appartenant pas à une barrière 5-6-6 et la valeur est 10.

manière, on obtient inévitablement des configurations avec cycles séparateurs plus longs que nécessaire. Plus tard nous avons découvert que si nous utilisons, au premier stade des opérations, les *déchargements transversaux* (déchargements  $T$ ), permettant à un sommet de degré 5 de transférer sa charge à travers une arête 6-6 voisine et de perdre ainsi une partie de sa charge positive, le résultat est un ensemble de configurations de taille plus petite.

Nous définissons dans la Fig. 7 tous les déchargements  $T$  (les flèches expliquent le transfert des charges). Il va sans dire que, dans le cas de  $v_5$  séparés, aucune barrière 5-6-6 ne peut se présenter dans le voisinage d'un  $v_5$  et seuls les déchargements  $T$  de la deuxième ligne de la Fig. 7 sont possibles. Nous désignons par  $q_T$  la distribution obtenue à partir de  $q_0$  à l'aide des déchargements  $T$ .

Nous considérons d'abord deux cas particuliers.

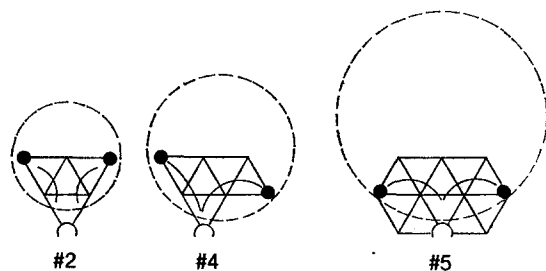
*Cas préliminaire 1.* Un  $v_5$  ayant une barrière 6-6-6 ne transfère pas une charge  $\geq 10$  à travers chaque 6-6 arête de la barrière. Cela donne un des cas suivants:



(Les configurations encadrées sont membres de l'ensemble  $U$ . Leurs numéros sont ceux de la Fig. 6.)

Nous ne considérerons plus de tels cas.

*Cas préliminaire 2.* Un sommet majeur, vis-a-vis d'une arête 6-6  $E$  reçoit plus d'un déchargement  $T$  à travers  $E$ . Cela nous donne un des cas suivants:



Nous ne considérerons plus de tels cas.

Désormais



veut dire



ou



ou



(b) *Les circonstances de basse capacité relativement à  $q_T$*

Si un sommet majeur  $V$  a  $\nu(V)$  voisins de degré 5 et a une charge  $q_T(V) > -30\nu(V)$  nous l'appelons *une circonstance de basse capacité*. Il est évident que ces circonstances de basse capacité demandent attention quand nous continuons de définir la procédure de déchargement. Si une arête  $E$  joint un  $v_5$  à un sommet majeur  $V$ , nous définissons la *capacité* de cette arête (relativement à  $q_T$ ):

$$\text{Cap}_T(E) = \frac{-q_T(V)}{\nu(V)}.$$

Pour compléter la définition de notre méthode de déchargement nous définissons, pour chaque arête joignant un  $v_5$  à un sommet majeur, une *valeur de déchargement*  $d(E)$  et nous obtenons à partir de  $q_T$  une nouvelle distribution de charge  $q$ , par transfert d'une charge  $= d(E)$  du  $v_5$  sur le sommet majeur.

Dans les *cas réguliers*, quand  $\text{Cap}_T(E) \geq 30$ , nous définissons  $d(E) = \text{Cap}_T(E)$ . Mais, dans les circonstances de basse capacité ( $\text{Cap}_T(E) < 30$ ), nous définissons pour chaque cas des *valeurs* particulières qui pourront être supérieures, égales, ou inférieures à  $\text{Cap}_T(E)$ . Dans [2] nous avons défini ces valeurs particulières de  $d(E)$  par un *algorithme de déchargement fractionnel* tel que  $d(E)$  (écrit  $f(E)$  dans [2]) était une fonction des capacités de toutes les arêtes incidentes au même  $v_5$  que  $E$ .

Pendant nous avons amélioré la définition de  $d(E)$  de façon à prendre en compte davantage d'information sur le voisinage du sommet majeur auquel  $E$  est incidente. Avant de définir les valeurs particulières de  $d(E)$ , il faut recenser toutes les circonstances de basse capacité. Ceci est présenté dans la Fig. 8. Comme nous ne considérons plus le cas préliminaire 2, des circonstances de

basse capacité peuvent se présenter seulement si le sommet majeur  $V$  est de degré 7. (Dans le cas général, le degré de  $V$  peut être 11, mais la seule circonstance comportant cette valeur est un  $v_{11}$  avec onze  $v_5$  voisins, une configuration réductible de Birkhoff.) Dans la Fig. 8 sont catalogués tous les voisinages simples (*first neighborhoods*) d'un  $v_7$  pouvant comporter des arêtes de basse capacité (incidentes au  $v_7$  central). Pour les sommets voisins, on précise si le

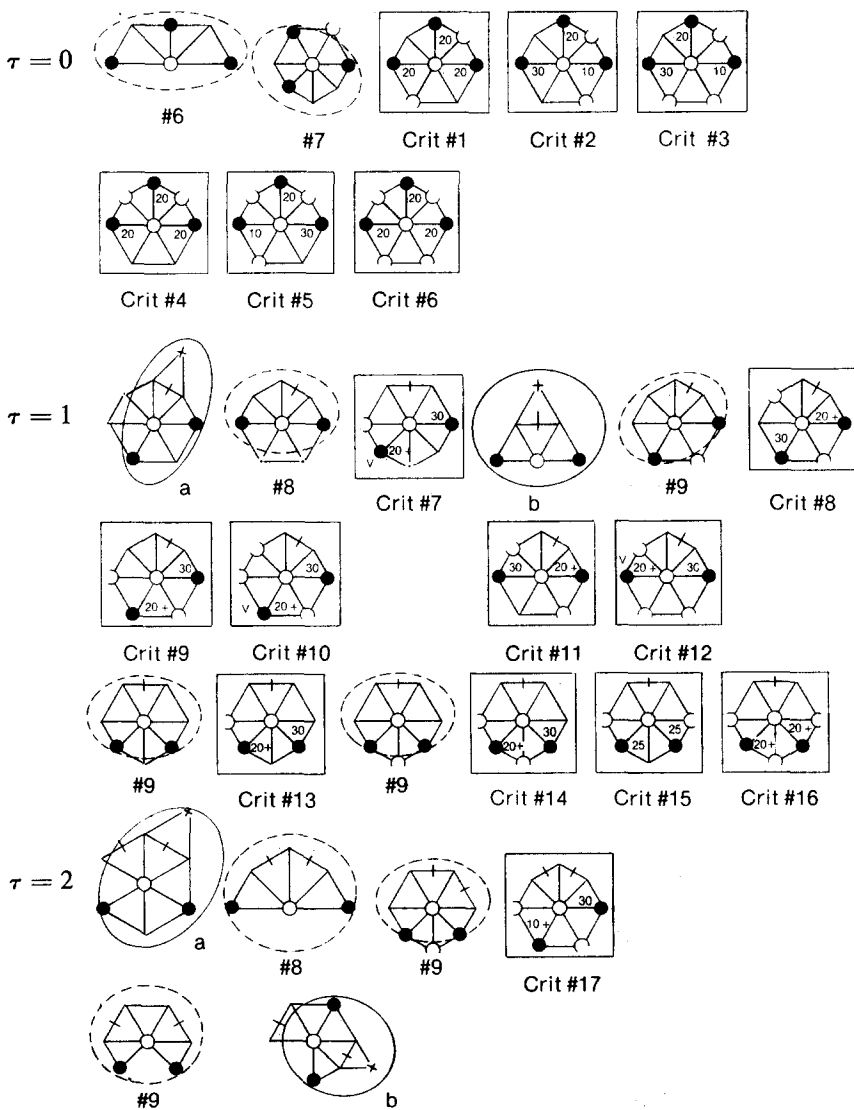


FIG. 8. Les circonstances de basse capacité relativement à  $q_T$ .

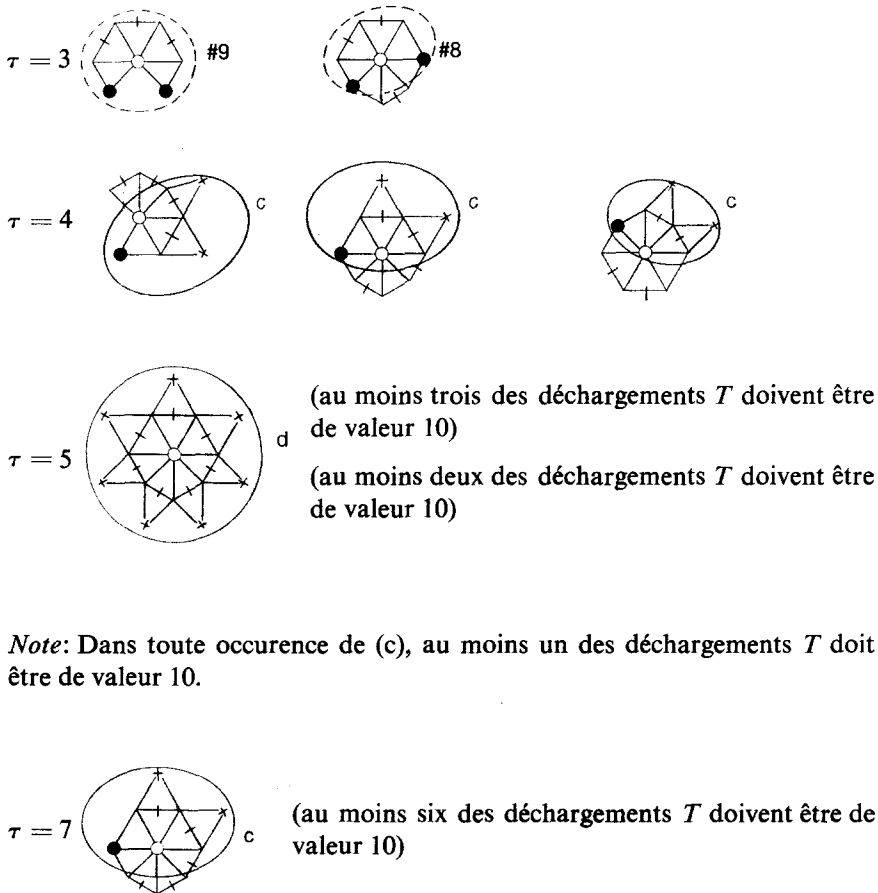


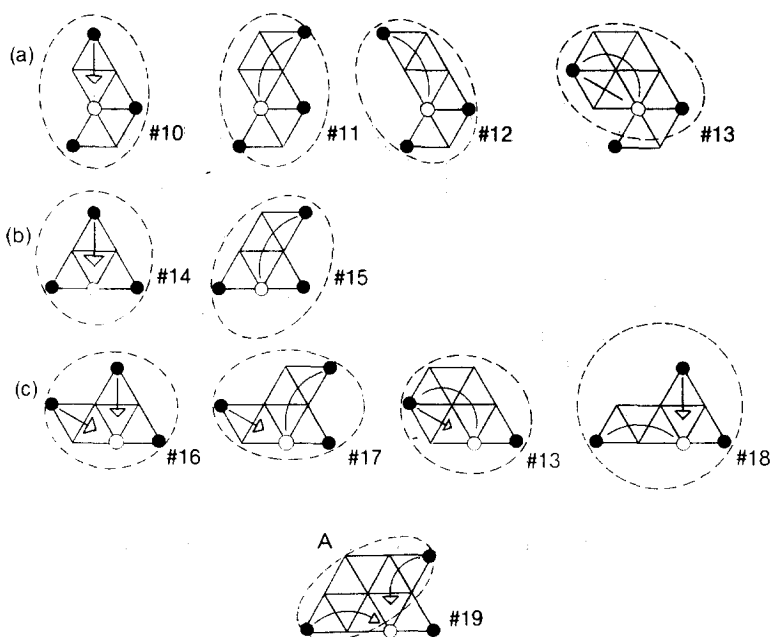
FIG. 8—suite.

degré est 5, 6 ou majeur. Sont aussi indiqués les déchargements  $T$  effectués sur le  $v_7$  central. Le nombre de ces déchargements  $T$  est indiqué par  $\tau$ .

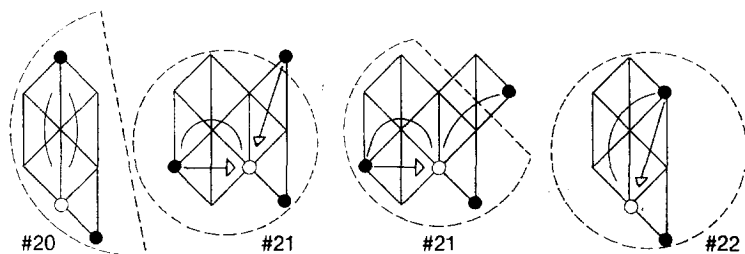
Les 17 configurations qui ne comprennent pas d'éléments de notre ensemble  $U$  sont appelées *critiques* et sont encadrées et énumérées dans la Fig. 8. Les autres configurations (non critiques) contiennent des sous-configurations encadrées qui sont membres de  $U$  (dont le numéro est indiqué auprès de la ligne qui les encadre), ou bien introduisent des membres de  $U$  dans tous les cas de déchargement  $T$  indiqués. Dans cette situation une petite lettre romaine est placée à côté du cercle: tous les cas de réalisation de ces déchargements  $T$  sont discutés, à la suite de la Fig. 8, dans la partie indiquée par la lettre.

Discussion des configurations "condensées" de la Fig. 8.

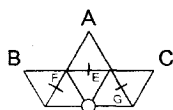
(a) à (d)



A doit être de degré 6, parce qu'autrement tous les déchargements  $T$  auraient pour valeur 5 (ou #2 se présenterait).



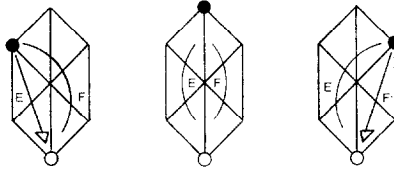
(d) (i) Si un  $v_5$  se décharge transversalement de telle manière que le *pivot* (le sommet majeur qui reçoit le transfert de charge) reçoit le transfert de charge d'un côté précis (disons  $E$ ), nous avons:



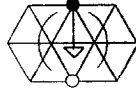
où  $A, B, C$ , sont mineurs (autrement les déchargements  $T$  à travers  $E, F, G$  ne sont pas tous possibles), Ainsi  $\deg A = 5$  (parce qu'autrement on peut avoir un déchargement  $T$  où le  $v_5$  qui se décharge à travers  $E$  se décharge aussi à travers  $F$  ou  $G$ ). Ainsi nous avons



(ii) Si un  $v_5$  se décharge de telle manière que le pivot reçoit le transfert de deux côtés précis, nous avons un des cas suivants:

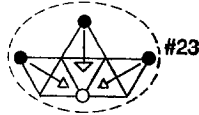


(iii) Si un  $v_5$  se décharge de telle manière que le pivot reçoit le transfert de plus de deux côtés, il doit le recevoir précisément de trois côtés et nous avons le cas:



Ainsi un des cas suivants se présente nécessairement:

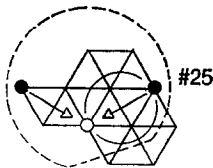
(i) (i) (i)



(i) (ii)

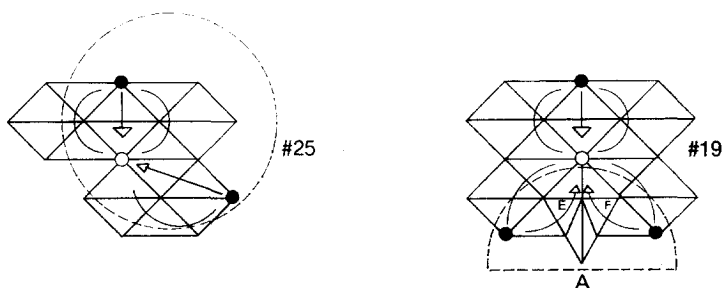


(i) (iii)

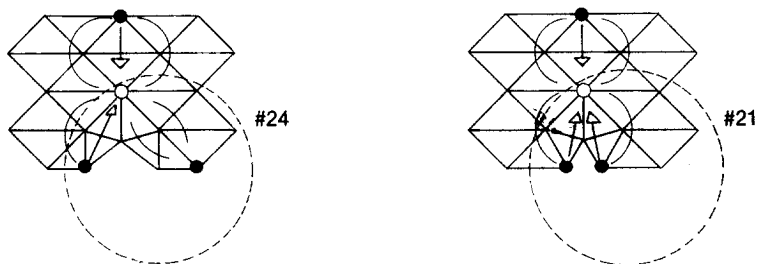




(ii) (ii) (ii)



(Si  $A$  était majeur, le déchargement  $T$  à travers  $E$  comme à travers  $F$  serait nécessairement 5.)



### (C) Les valeurs particulières de $d(E)$

Désormais nous pouvons supposer que toutes les circonstances de basse capacité qui se présentent sont critiques. Dans ces circonstances critiques ( $\#1, \dots, \#18$ ), nous avons défini les valeurs de  $d(E)$  pour toutes les arêtes  $E$ , joignant le  $v_7$  central aux  $v_6$  voisins comme indiqué par les nombres écrits sur ces arêtes dans la Fig. 8. Ici, la notation “20+” veut dire:

$$d(E) = \begin{cases} 20 & \text{si le déchargement } T \text{ transfère 10 sur ce } v_7 \\ 25 & \text{si le déchargement } T \text{ transfère 5 sur ce } v_7 \end{cases}$$

et “10+” veut dire:

$$d(E) = \begin{cases} 10 & \text{si les déchargements } T \text{ transfèrent 10 sur ce } v_7 \\ 15 & \text{si les déchargements } T \text{ transfèrent 15 sur ce } v_7 \\ 20 & \text{si les déchargements } T \text{ transfèrent 10 sur ce } v_7. \end{cases}$$

La définition des valeurs particulières de  $d(E)$  est telle que toujours  $q(V_7) \leq 0$  pour le  $v_7$  central.

Ces arêtes  $E$  pour lesquelles  $d(E) < 30$  sont appelées *petites d-arêtes* et leurs 18 différents sortes sont enregistrées (dans un ordre facilitant la

consultation) et désignées comme *petites d-circonstances*  $S_{10}$  #1,...,  $S_{25}$  #18 dans la Fig. 9.

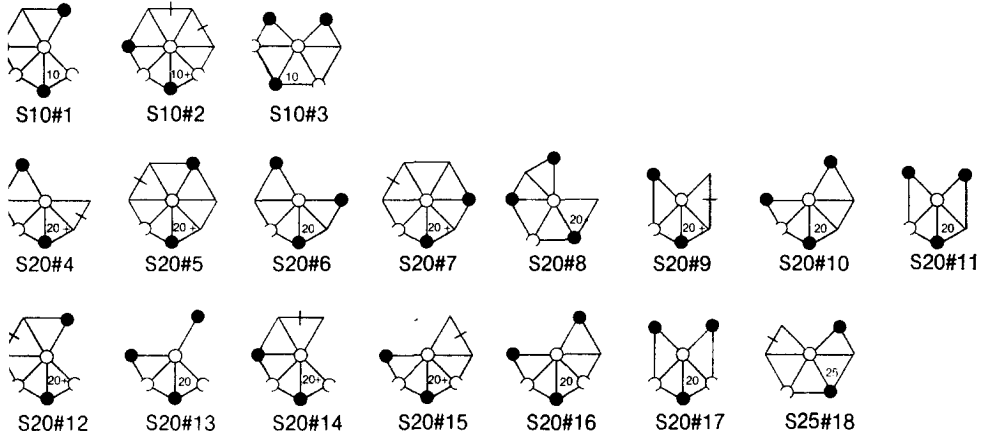
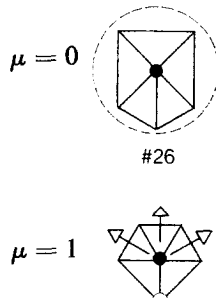


FIG. 9. Les petites  $d$ -circonstances.

(d) *Les 5-arêtes  $q$ -positives*

A présent les seuls sommets qui peuvent avoir des charges positives sont de degré 5 et il faut discuter tous les cas possibles où  $q(v_5) > 0$ . Nous indiquons le nombre de voisins majeurs d'un  $v_5$  par  $\mu(v_5)$  et nous discuterons les cas  $\mu = 0, \dots, 5$ . Si, dans tous les cas où  $q(v_5) > 0$ , un membre de  $U$  au moins se présente, la preuve sera complète.



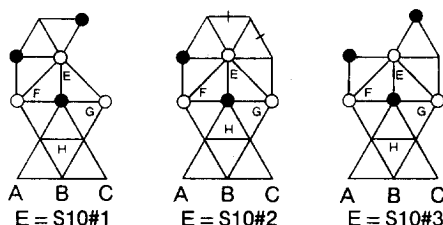
Si  $q(v_5) > 0$ ,  $E$  doit être une petite  $d$ -arête mais ceci est impossible.

$\mu = 2$ . Au moins une des arêtes joignant le  $v_5$  aux voisins majeurs doit être une petite  $d$ -arête et même une des arêtes de  $S_{20}$  #4,..., #11,  $S_{25}$  #18 (parce qu'autrement  $\mu$  doit être au moins 3). Ainsi, dans un tel cas le  $v_5$  est vis-à-vis d'une barrière 6-6 et, par conséquent, perd au moins 20 par déchargement  $T$  à travers les arêtes 6-6 de cette barrière. Ainsi la seconde

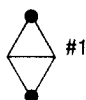
arête joignant le  $v_5$  à un voisin majeur doit aussi être une petite  $d$ -arête et  $d$  doit être inférieur à 20. Mais c'est impossible parce que  $S_{10}$  #1,  $S_{10}$  #2 et  $S_{10}$  #3 peuvent se présenter seulement si  $\mu \geq 3$ .

$\mu = 3$ . Au moins une des arêtes joignant le  $v_5$  aux voisins majeurs doit avoir  $d < 20$ , et doit ainsi être l'une des arêtes  $S_{10}$  #1,  $S_{10}$  #2,  $S_{10}$  #3. Aucune des autres arêtes joignant le  $v_5$  aux voisins majeurs ne peut être  $S_{10}$  #1,  $S_{10}$  #2,  $S_{10}$  #3 ni l'une des arêtes  $S_{20}$  #12, ...,  $S_{20}$  #17, car il faudrait alors que  $\mu \geq 4$ . Ainsi chacune des deux autres arêtes doit faire partie de  $S_{20}$  #4, ...,  $S_{20}$  #11,  $S_{25}$  #18.

Ainsi aucun déchargement  $T$  ne peut avoir lieu à partir du  $v_5$  central. Ainsi l'une des sous-configurations suivantes doit nécessairement se présenter:



(Les sommets  $A, B, C$  sont nécessairement de degré 6: autrement, ou bien un déchargement  $T$  passerait à travers  $H$ , ou bien



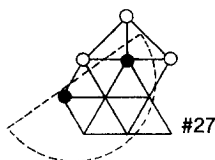
ou



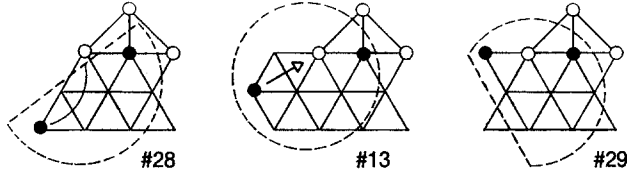
se présenterait.)

Chacune des arêtes  $F, G$  doit être une des arêtes  $S_{20}$  #4, ...,  $S_{20}$  #11,  $S_{25}$  #18, mais sans que  $d(F)$  et  $d(G)$  puissent être tous deux 25. Ainsi une des sous-configurations suivantes doit se présenter:

(i) Si au moins une des 5-arêtes ##6, 7, 11, 18 se présente, nous avons:



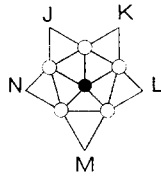
(ii) Si au moins une des 5-arêtes ##4, 5, 9, 10 se présente, nous avons l'une des configurations:



(iii) Le cas  $F = G = S_{20}$  #8 est impossible pour les  $v_5$  isolés. Ainsi le cas  $\mu = 3$  est fini.

$\mu = 4$ . Au moins trois des arêtes joignant le  $v_5$  à ses voisins majeurs doivent avoir  $d = 10$ , mais c'est impossible si  $\mu$  n'est pas 5.

$\mu = 5$ . Toutes les arêtes joignant le  $v_5$  à ses voisins majeurs doivent avoir  $d = 10$ . Mais, pour les  $v_5$  isolés c'est impossible parce que (pour éviter des arêtes 5-5) les sommets  $J, K, L, M, N$ , dans la figure suivante, devraient être alternativement (dans l'ordre cyclique) de degré 5 et  $\neq 5$ .



(e) Une observation concernant le cas général:

Dans le cas général (triangulations sans restrictions) les discussions seront plus longues mais par ailleurs semblables, si ce n'est que quelques circonstances critiques avec  $q(v_5) > 0$  se présentent. Mais chacune de ces circonstances peut être traitée en définissant une *grande valeur*  $d(E)$  *exceptionnelle* pour une arête ayant  $\text{Cap}_T(E) \geq 0$  (arête incidente au  $v_5$   $q$ -positif, telle que  $d(E) > \text{Cap}_T(E)$  et telle que la charge entière du  $v_5$  est transférée).

Ces grandes valeurs exceptionnelles occasionnent quelques circonstances secondaires de basse capacité qui peuvent être traitées par itération de cette procédure.

*Note added in proof.* La preuve du théorème des quatre couleurs était obtenue six mois après ce résultat. (Voir: Every planar map is four colorable, Part I: Discharging, by K. Appel and W. Haken, and Part II: Reducibility, by K. Appel, W. Haken, and J. Koch, *Illinois J. Math.* **21** (1977), 429-567.)

## BIBLIOGRAPHIE

1. K. APPEL AND W. HAKEN, An unavoidable set of configurations in planar triangulations, *J. Combinatorial Theory Ser. B* **26** (1979), 1–21.
2. K. APPEL AND W. HAKEN, The existence of unavoidable sets of geographically good configurations, *Illinois J. Math.* **20** (1976), 218–297.
3. G. D. BIRKHOFF, The reducibility of maps, *Amer. J. Math.* **35** (1913), 114–128.
4. C. CHOJNACKI, A contribution to the four color problem, *Amer. J. Math.* **64** (1942), 36–54.
5. W. HAKEN, An existence theorem for planar maps, *J. Combinatorial Theory* **14** (1975), 180–184.
6. H. HEESCH, “Untersuchungen zum Vierfarbenproblem,” B-I-Hochschulscripten 810/810a/810b, Bibliographisches Institut, Mannheim/Vienna/Zurich, 1969.
7. H. HEESCH, Chromatic reduction of the triangulations  $T_e$ ,  $e = e_5 + e_7$ , *J. Combinatorial Theory Ser. B* **19** (1975), 119–149.
8. A. B. KEMPE, On the geographical problem of the four colors, *Amer. J. Math.* **2** (1879), 193–200.
9. J. MAYER, Problème des quatre couleurs: Un contre-exemple doit avoir au moins 96 sommets, *J. Combinatorial Theory*, à paraître.
10. R. STANIK, “Zur Reduction von Triangulationen,” Dissertation, Technische Universität Hannover, 1974.
11. W. STROMQUIST, “Some Aspects of the Four Color Problem,” Thèse, Harvard University, 1975.
12. W. TUTTE AND H. WHITNEY, Kempe chains and the four color problem, *Utilitas Math.* **2** (1972), 241–281.